第 52 卷 第 5 期 中山大学学报（自然科学版） Vol. 52 No. 5
2013 年 9 月 ACTA SCIENTIARUM NATURALIUM UNIVERSITATIS SUNYATSENI Sep. 2013

$C_2 \oplus C_{2n}$ 上不可分原子的结构*

官欢欢[1]，袁平之[2]
（1. 贵州财经大学数学与统计学院，贵州 贵阳 550025；
2. 华南师范大学数学科学学院，广东 广州 510631）

摘　要： 设 G 是有限阿贝尔群，S 是群 G 上一个序列，称 S 是可分的原子，如果 $S=(g_1+g_2)T$，其中 $g_1,g_2\in G,T\in F(G)$ 满足 $S\in A(G)$ 且 $g_1g_2T\in A(G)$。设 $G\cong C_2\oplus C_{2n}$ 是秩为 2 的有限阿贝尔群，且 S 是群 G 上长度为 $n+4$ 的不可分原子，给出了群 $C_2\oplus C_{2n}$ 上不可分原子 S 的的具体结构。

关键词： 有限阿贝尔群；Davenport 常数；零和序列；不可分

中图分类号： O156.1　　**文献标志码：** A　　**文章编号：** 0529－6579（2013）05－0078－04

The Structure of Unsplittable Atoms over $C_2 \oplus C_{2n}$

GUAN Huanhuan[1], *YUAN Pingzhi*[2]
（1. School of Mathematics & Statistics, Guizhou University of Finance and Economics, Guiyang 550025, China;
2. School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China）

Abstract: Let G be a finite Abelian group, and let S be a sequence over G. A sequence S is called a splittable atom if $S=(g_1+g_2)T$ for some $g_1,g_2\in G$ and $T\in F(G)$ such that $S\in A(G)$ and $g_1g_2T\in A(G)$. Suppose that $G\cong C_2\oplus C_{2n}$. An exhaustive list detailing the precise structure of S is given, where S is unsplittable with length no less than $n+4$.

Key words: finite Abelian group; Davenport's constant; zero-sum sequences; unsplittable

本文的符号参看文献［1］。

设 $\mathbb{N}$ 为正整数集合，$\mathbb{N}_0=\mathbb{N}\cup\{0\}$。对实数 $a,b\in\mathbb{R}$，记 $[a,b]=\{x\in\mathbb{Z}\mid a\leqslant x\leqslant b\}$。$\lceil a\rceil$ 表示不小于实数 a 的最小整数，$\lfloor a\rfloor$ 表示不大于实数 a 的最大整数。设 $n\in\mathbb{N}$，C_n 表示阶为 n 的循环群。记 P_n 为关于 $[1,n]$ 的对称群。

设 G 是有限阿贝尔群，由有限阿贝尔群结构定理知，存在 $n_1,n_2,\cdots,n_r\in\mathbb{N}$，使得 $G\cong C_{n_1}\oplus C_{n_2}\oplus\cdots\oplus C_{n_r}$，其中 $r=n_1=1$ 或者 $1<n_1\mid n_2\mid\cdots\mid n_r$，称 n_r 为群 G 的指数，记为 $\exp(G)$，r 为群 G 的秩。若 $r=1$，则群 G 为循环群；若 $n_1=n_2=\cdots=n_r=n$，记为 $G=C_n^r$。对任意 $g\in G$，$\mathrm{ord}(g)$ 表示元素 g 的阶。

设 $F(G)$ 是以群 G 为基的自由乘法阿贝尔幺半群。$F(G)$ 中的元素 S 称为群 G 上的序列，记为

$$S=g_1\cdot\cdots\cdot g_l=\prod_{g\in G}g^{\nu_g(S)}$$

其中 $\nu_g(S)\in\mathbf{N}_0$ 为元素 g 在序列 S 中出现的次数，称为 g 在 S 中的重数。$|S|=l=\prod_{g\in G}\nu_g(S)\in\mathbf{N}_0$ 表示序列 S 的长度，且记

$$\mathrm{supp}(S)=\{g\in G\mid\nu_g(S)>0\}\subset G$$

因此序列 S 是由群 G 中元素组成的多重集。$F(G)$ 中的单位元素 1 称为空序列，记为 ϕ，其长度为 0。

若有 $\nu_g(S)>0$，称 S 包含元素 g，记为 $g\mid S$。

序列 $T\in F(G)$ 称为序列 S 的子序列，如果对

* **收稿日期：** 2012－11－23
基金项目： 贵州省科学技术基金资助项目（黔科合 J 字［2013］2087 号）；2012 年度贵州财经大学引进人才科研资助项目
作者简介： 官欢欢（1984 年生），女；**研究方向：** 组合数论；E-mail：guan1110h@163.com

所有的 $g \in G$，$\nu_g(T) \leqslant \nu_g(S)$，记为 $T \mid S$。若 $1 \leqslant |T| < |S|$，称 T 为 S 的真子序列。

如果 $T \mid S$，则记 ST^{-1} 为序列 S 去掉序列 T 中的元素之后所得的序列。

$\sigma(S)$ 表示序列 S 的和，即 $\sigma(S) = \sum_{i=1}^{l} g_i$。如果 $\sigma(S) = 0$，称 S 为零和序列。

对任意的 $k \in \{1, 2, \cdots, l\}$，记

$$\sum_k (S) = \{g_{i_1} + g_{i_2} + \cdots + g_{i_k} \mid 1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant l\},$$

$$\sum_{\leqslant k}(S) = \bigcup_{i=1}^{k} \sum_i (S), \sum_{\geqslant k}(S) = \bigcup_{i=k}^{l} \sum_i (S),$$

$$\sum (S) = \bigcup_{i=1}^{l} \sum_i (S)$$

如果 $0 \notin \sum(S)$，称 S 为零和自由序列。

若 S 是群 G 上的零和序列，且其任意真子序列都是零和自由序列，则称 S 是最小零和序列。

若 S 是群 G 上的零和序列，并且 $1 \leqslant |S| \leqslant \exp(G)$，则称 S 为短零和序列。

群 G 的所有零和序列的集合记为 $B(G)$，所有最小零和序列的集合记为 $A(G)$。

记 $h(S) = \max_{g \in G}\{\nu_g(S) \mid g \in G\} \in [0, |S|]$ 表示序列 S 的最大重数。如果 $\nu_g(S) \leqslant 1$，称 S 为平方自由序列。

用 $D(G)$ 记 Davenport 常数，即满足下列条件的最小的正整数 d，使得群 G 中每个长度不小于 d 的序列都含有一个非空的零和子序列。

设 G 和 G' 都是有限阿贝尔群，$S = g_1 \cdot \cdots \cdot g_l \in F(G)$，给定群同态 $\varphi: G \to G'$，将 φ 扩展到其生成的自由幺半群上的同态，定义 $\varphi(S) = \varphi(g_1) \cdot \cdots \cdot \varphi(g_l)$，则 φ 为 $F(G)$ 上的同态。

为了更好的给出本文的结论，首先给出下面两个定义。

定义 1[2] 设 S 是群 G 上一个序列，称 S 是可分的原子（a splittable atom），如果 $S = (g_1 + g_2)T$，其中 $g_1, g_2 \in G, T \in F(G)$ 满足 $S \in A(G)$ 且 $g_1 g_2 T \in A(G)$。反之则称为不可分的（unsplittable）。

定义 2[2]　一个序列 $S \in F(G)$ 称为光滑的（smooth），如果 $S = (n_1 g) \cdot (n_2 g) \cdot \cdots \cdot (n_l g)$，其中

$$|S| \in \mathbb{N}, g \in G, 1 = n_1 \leqslant n_2 \leqslant \cdots \leqslant n_l,$$
$$n = n_1 + \cdots + n_l < \mathrm{ord}(g)$$

且 $\sum(S) = \{g, \cdots, ng\}$（此时更确切地称 S 是 g - 光滑的）。

设 S 是群 G 上一个不可分原子。2009 年，Savchev 与 Chen 给出了阶为 n 的循环群上的长度超过其 Davenport 常数一半的不可分原子的结构，参看文献［2－6］。

定理 1（Savchev-Chen）　设 G 是阶为 $n \geqslant 3$ 的循环群，且 U 是群 G 上长度为 $|U| \geqslant \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2$ 的不可分原子。那么存在 $g \in G$ 使得 $U = g^n$。

本文给出了秩为 2 的有限阿贝尔群 $C_2 \oplus C_{2n}$ 上不可分原子 S 的的具体结构。下面是本文的结论。

定理 2　设 S 是群 $G = C_2 \oplus C_{2n}$ 上长度为 $n + k, k \geqslant 4$ 的不可分原子。则存在群 G 的阶为 n 的循环子群 $H = \langle h \rangle, h \in G$ 使得 $S = b^u c^v d^w$，其中 b, c, d 属于群 G 的不同的 H - 陪集，$\min\{v, w\} = 1$，$2b = h$，$c + d = b$ 且 $\mathrm{ord}(g) = 2n$。

1　准备知识

引理 1[3]　循环群 C_n 上长度大于 $\frac{n}{2}$ 的零和自由序列都是光滑的。

引理 2[3]　设 n 是正整数。每一个长度大于 $\frac{n}{2}$ 且和小于 n 的正整数序列是 1 - 光滑的。

引理 3[7]　设 $n \geqslant 2$ 是正整数。每一个长度 $|S| \geqslant 3n - 2$ 的序列 $S \in F(C_n \oplus C_n)$ 包含一个短零和序列。

设 $G = C_2 \oplus C_{2n}$，且 $S \in F(G)$ 是长度为 $n + k, k \geqslant 4$ 的零和自由序列。设 H 是群 G 的子群满足 $G/H \cong C_2 \oplus C_2$。显然 H 是 n 阶循环子群。记 $\varphi: G \to G/H$ 为自然同态。因为 $|\varphi(S)| \geqslant 4$，由引理 3 知，$\varphi(S)$ 包含一个短零和子序列，即 S 有一个长度不超过 2 的非空子序列其和属于 H。由 $|S| = n + k \geqslant 4$ 知，存在子序列 $S_1 \mid S$，$|S_1| \leqslant 2$ 使得 $\sigma(S_1) \in H$。如果 $|SS_1^{-1}| \geqslant 4$，可选择 $S_2 \mid SS_1^{-1}$，$|S_2| \leqslant 2$ 使得 $\sigma(S_2) \in H$。重复上面的步骤至少 $\frac{(n+k-3)}{2}$ 次，可得到至少 $\frac{(n+k-3)}{2}$ 个 S 的非空子序列使得它们的和都在 H 中。

故可将 S 分拆为 $S = S_1 \cdots S_N S'$，其中 $\sigma(S_i) \in H$，$|S_i| \leqslant 2$，$1 \leqslant i \leqslant N$，$S' \cap H = \varnothing$，$h(S') = 1$ 且 $|S'| \leqslant 3$。设

$$A = \{S = S_1 \cdots S_N S' \mid \sigma(S_i) \in H, |S_i| \leqslant 2, 1 \leqslant i \leqslant N, \text{且 } S' \cap H = \varnothing, h(S') = 1, |S'| \leqslant 3\}$$

对任意的 $S = S_1 \cdots S_N S' \in A$，记 $T = \sigma(S_1) \cdots \sigma(S_N) \in F(H)$。由 $0 \notin \sum(S)$ 可知 T 是

H 上的零和自由序列。应用引理 1 可知，对某个 $g \in H$，T 是 g - 光滑的且 $\mathrm{ord}(g) = n$。称 $S_1 \cdots S_N S'$ 是序列 S 的一个 N - 分拆。在下面的讨论中，考虑最大的 N，记为 N_0，显然 $N_0 \geqslant \frac{n+1}{2}$。

2　定理证明

设 $S \in A(G)$ 是长度为 $n+k, k \geqslant 4$ 的不可分原子。则由前面的讨论知存在 $h \in G$ 使得 $\mathrm{ord}(h) = n$ 且 $G/H \cong C_2 \oplus C_2$，其中 $H = \langle h \rangle$。故存在 $b, c, d \in G$ 使得

$G = H \cup (b+H) \cup (c+H) \cup (d+H)$，$2b, 2c, 2d \in H$ 且 $b+c+d \in H$

因此可设 $S = ABCD$，其中 $A \in F(H)$，$B \in F(b+H)$，$C \in F(c+H)$，$D \in F(d+H)$。由 $S \in A(G)$ 知，$|B|, |C|, |D|$ 有相同的奇偶性。

① 若 $|B|$ 是偶数，则 $|C|, |D|$ 均是偶数。对任意 $b_1 b_2 | B$ 均有 $b_1 + b_2 \in H$。同理 C, D 亦然。分别将 B, C, D 中的元素进行两两组合相加，则得到相应的序列的集合 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D}$。对任意 $A_B \in \mathfrak{B}$，$A_C \in \mathfrak{C}$，$A_D \in \mathfrak{D}$，可得序列 $T = AA_BA_CA_D \in A(H)$。故 $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \subset F(H)$，并且有

$$|T| = |A| + |A_B| + |A_C| + |A_D| =$$
$$|A| + \frac{|A_B| + |A_C| + |A_D|}{2} \geqslant \frac{n+k}{2} \geqslant \frac{n+4}{2}$$

若 $|B|$ 是奇数，则 $|C|, |D|$ 均是奇数。对任意的 $b_i \in B$，$c_j \in C$，$d_k \in D$，分别将 $B \setminus \{b_i\}$，$C \setminus \{c_j\}$，$D \setminus \{d_k\}$ 中的元素进行两两组合相加，则得到相应的序列的集合 $\mathfrak{B}_i, \mathfrak{C}_j, \mathfrak{D}_k$。对任意 $A_B \in \mathfrak{B}_i$，$A_C \in \mathfrak{C}_j$，$A_D \in \mathfrak{D}_k$，由上面的论述知，可得序列

$$T = AA_BA_CA_D(b_i + c_j + d_k) \in A(H),$$

且

$$|T| = |A| + |A_B| + |A_C| + |A_D| + 1 =$$
$$|A| + \frac{|A_B| + |A_C| + |A_D| - 3}{2} + 1 \geqslant \frac{n+k-1}{2} \geqslant \frac{n+3}{2}$$

因此存在生成元 $h' \in H$ 使得对任意的 $a | T$，均有 $a = a_i h'$，且 $\sum_{i=1}^{|T|} a_i = n$，其中 $a_i \in \mathbb{N}_0$，$1 \leqslant a_i < \frac{n}{2}$ 且 $1 \leqslant i \leqslant |T|$。不妨设 $h' = h$。对任意的 $a | T$，均有 Ta^{-1} 是 h - 光滑的。

为了更好的证明，首先给出一个断言。

断言 1　如果下列的条件有一个成立，则 S 是可分的。

(i) $g | A, g \neq h$;

(ii) 存在 $g | B$，使得对任意的 $g' | Bg^{-1}$，$g' + g \neq h$，且对任意的 $c | C$，$d | D$，$g' + c + d \neq h$。同理由对称性，条件对 C, D 也成立。

断言的证明：(i) 若存在 $g | A$ 满足 $g = sh, s \geqslant 2$，则 $g = (s-1)h + h$。下面证明序列 $S' = Sg^{-1} \cdot (s-1)h \cdot h$ 是最小零和序列。欲证 $S' \in A(G)$，只需证明对任意 $U | S'h^{-1}$，U 是零和自由的。

首先考虑 $(s-1)h | U$。设 $U = A' \cdot B' \cdot C' \cdot D' \cdot (s-1)h$，其中 $A' | A$，$B' | B$，$C' | C$，$D' | D$ 是 S 的子序列。因为 $A' | A$，$B' | B$，$C' | C$，$D' | D$，若 $\sigma(S') = 0$，则 $|B'|, |C'|, |D'|$ 的奇偶性相同。

类似于上面的讨论，以及对应的符号，总存在 A_B, A_C, A_D 使得 $A_{B'} | A_B$，$A_{C'} | A_C$，$A_{D'} | A_D$ 满足 $U' = A' \cdot A_{B'} \cdot A_{C'} \cdot A_{D'} \cdot E \cdot (s-1)h$ 是序列 S 的零和子序列，并且对任意的 $u | U'$ 均有 $u = u_i h, u_i \in [1, \frac{n}{2})$，其中当 $2 \| |B'|$ 时，$|E| = 0$；否则 $|E| = 1$。

因为 $U' \cdot ((s-1)h)^{-1} | Tg^{-1}$，所以 $\sum_{i=1}^{|U'|-1} u_i + s \leqslant n$，故而 $\sum_{i=1}^{|U'|-1} u_i + (s-1) < n$，与 $\sigma(U') = 0$ 矛盾。因此 U' 是零和自由的，即 $S' \in A(G)$。故 S 可分。

最后考虑 U 不包含元素 $(s-1)h$，显然 U 是零和自由的。

(ii) 若存在 $g | B$ 使得对任意的 $g' | Bg^{-1}$，$g' + g \neq h$，且对任意的 $c | C$，$d | D$，$g' + c + d \neq h$，只需证明序列 $S' = Sg^{-1} \cdot (g-h) \cdot h \in A(G)$。显然 $\sigma(S') = 0$。只需证明对任意的 $U | S'h^{-1} = Sg^{-1} \cdot (g-h)$ 是零和自由的。若 U 不包含元素 $(g-h)$，则 $U | S$，$|U| < |S|$。由 $S \in A(G)$ 知，U 是零和自由的。

若 $(g-h) | U$，设 $U = A' \cdot B' \cdot C' \cdot D' \cdot (g-h)$。若 $\sigma(U) = 0$，则 $|B'| + 1$，$|C'| + 1$，$|D'| + 1$ 有相同的奇偶性。类似于 (i) 的讨论可得矛盾。因此 U 是零和自由的，故 $S' \in A(G)$。断言得证。

② $A = h^t, t \geqslant 0$。

由断言 1，显然可以得到。

③ $|\mathrm{supp}(B)| \leqslant 2$。同理 $|\mathrm{supp}(C)| \leqslant 2$，$|\mathrm{supp}(D)| \leqslant 2$。

若 $|\mathrm{supp}(B)| \geqslant 3$，设 $B = b_1^{s_1} b_2^{s_2} b_3^{s_3} \cdots b_u^{s_u}$，由断言 1 知，存在 $b_i \neq b_j$ 使得 $b_i + b_j = h$，并且存在 $b_k \neq b_j$ 使得 $b_k + b_l = h$。因为 $b_k \neq b_j$，所以 $b_k + b_i = sh, s \in [2, \frac{n}{2})$，$b_j + b_l = rh, r \in [1, \frac{n}{2})$。从而

$$b_i + b_j + b_k + b_l = (b_i + b_j) + (b_k + b_l) = 2h = (b_k + b_i) + (b_j + b_l) = (s + r)h$$

矛盾！因此 $|\mathrm{supp}(B)| \leqslant 2$。

④ 若 $g_1 g_2 | B$ 且 $g_1 \neq g_2$，则 $g_1 + g_2 = h$。同理对 C,D 结论亦成立。

由断言 1 可直接得到。

⑤ 存在 B,C,D 中的一个满足其 supp 等于 1。

由断言 1 以及④，结论显然成立。在下面的证明中，不妨设

$|\mathrm{supp}(B)| = 1, B = b^u, u \geqslant 2, 2b = h$

⑥ $A = \varnothing$，即 A 是空序列。

由⑤知，不妨设 $B = b^u, u \geqslant 2, 2b = h$。若 $A \neq \varnothing$，则 $h = 2b$。从而 $Sh^{-1}b^{u+2} \in A(G)$。故 $A = \varnothing$。

下面给出另外一个断言。

断言 2　当 $C \neq \varnothing, D \neq \varnothing$ 时，若存在 $c | C$，对任意的 $d | D$，均有 $c + d \neq b$，则 S 是可分的。

断言 2 的证明：若存在 $c | C$，对任意的 $d | D$，均有 $c + d \neq b$，考虑序列 $S' = S \cdot c^{-1} \cdot (c - b) \cdot b$。下面证明 $S' \in A(G)$。只需证明 $S \cdot c^{-1} \cdot (c - b)$ 是零和自由的。

对任意的 $U | S \cdot c^{-1} \cdot (c - b)$，若 $U | S$，则由 $S \in A(G)$ 知，U 是零和自由的。下设 $(c - b) | U$。设 $U = B'C'D'(c - b)$，其中 $B' | B, C' | C, D' | D$。若 $\sigma(U) = 0$，则 $|B'|$，$|C'|$，$|D'| + 1$ 有相同的奇偶性。应用①，显然与 $\sigma(U) \neq 0$ 矛盾。因此 S 是可分的。断言得证。

⑦ 当 $C \neq \varnothing, D \neq \varnothing$ 时，$C = c^v, D = d^w$ 且 $\min\{v, w\} = 1$。不妨设 $S = b^u c^v d$。

由③知 $|\mathrm{supp}(C)| \leqslant 2$，$|\mathrm{supp}(D)| \leqslant 2$。

若 $|\mathrm{supp}(C)| = 2$，设 $c_1 c_2 | C, c_1 \neq c_2$。因为 $D \neq \varnothing$，由断言 2 知，存在 $dd' | D$，使得 $c_1 + d = c_2 + d' = b$。由 $2b = h$ 知，$c_1 + d + b = c_2 + d' + b = h$。因为 $c_1 \neq c_2$，故 $c_2 + d + b \neq h$，$c_1 + d' + b \neq h$，矛盾。因此 $|\mathrm{supp}(C)| = 1$。同理可证 $|\mathrm{supp}(D)| = 1$。

若 $v \geqslant 2, w \geqslant 2$，由断言 1 知 $2c = h, 2d = h$，故 $2c + 2d = 2h$。由断言 2 知 $c + d = b$。又由 $2b = h$ 可得 $b + c + d = h$，即 $2(c + d) = h$，矛盾。因为 $C \neq \varnothing, D \neq \varnothing$，所以 $\min\{v, w\} = 1$。

⑧ $D \neq \varnothing$。

若 $D = \varnothing$，由 $S \in A(G)$ 知，$|B|$，$|D|$ 均是偶数。由断言 1 知或者 $C = \varnothing$，或者 $C = c^v, v \geqslant 2$，$2c = h, 2 | v$。若 $C \neq \varnothing$，则 $2c = 2b = h$，即 $2(c - d) = 0$。考虑序列 $S \cdot c^{-1} \cdot (c - b) \cdot b$。显然 $S \cdot c^{-1} \cdot (c - b) \cdot b \in A(G)$，与 S 不可分矛盾，因此 $C = \varnothing$。此时 $S = b^{2n}, \mathrm{ord}(b) = 2n, 2b = h$。但是存在 $c, d \in G$，使得 $b = c + d$，从而序列 $S' = b^{2n-1} \cdot c \cdot d \in A(G)$，与 S 不可分矛盾。因此 $D \neq \varnothing$。

综上可得 $S = b^u c^v d^w$，其中 $\min\{v, w\} = 1$，且 $2b = h$，$b = c + d$，$\mathrm{ord}(b) = 2n$。

参考文献：

[1] GEROLDINGER A, HALTER-KOCH F. Non-unique factorizations [M]. Boca Raton: Chapman&Hall/CRC, 2006.

[2] GEROLDINGER A, RUZSA I. Combinatorial number theory and additive group theory [J]. Adv Courses Math CRM Barcelona, Birkhäuser, 2009:1－86.

[3] SAVCHEV S, CHEN F. Long zero-free sequences in finite cyclic groups [J]. Discrete Mathematics, 2007, 307: 2671－2679.

[4] SAVCHEV S, CHEN F. Long zero-free sequences in finite cyclic groups [J]. Discrete Mathematics, 2007, 308: 1－8.

[5] YUAN P Z. On the index of minimal zero-sum sequences over finite cyclic groups [J]. J Combin Theory Ser A, 2007, 114: 1545－1551.

[6] ZHUANG J J, YUAN P Z. Minimal zero-sum sequences in finite cyclic groups [J]. Taiwanese J Math, 2009, 13 (3): 1007 – 1015.

[7] GAO W D, GEROLDINGER A. On long minimal zero sequences in finite Abelian groups [J]. Periodica Math Hungarica, 1999, 38: 179－211.